Η ολιστική διδασκαλία των απλών γεωμετρικών τόπων, στα πλαίσια σύγχρονων παιδαγωγικών θεωρήσεων.

Γιάννης Π. Πλατάρος
ΜΠΕ Διδακτικής και μεθοδολογίας των Μαθηματικών
Επιμορφωτής Β΄ επιπέδου
Καπετάν Κρόμπα 37 , 24200 ΜΕΣΣΗΝΗ Ηλ.Ταχ. plataros@sch.gr

Περίληψη: Η διδασκαλία των απλών γ.τ. αποτελεί το μερικό μιας Γεωμετρικής γνώσης, ενώ έννοιες , όπως των κωνικών τομών ή των δυναμικών γραμμών στην Φυσική ή σε άλλες επιστήμες, αποτελούν κάποιες επεκτάσεις ή και γενικεύσεις τους , οι οποίες όμως συνήθως παρουσιάζονται ασύνδετα και αποσπασματικά. Η εργασία προτείνει μια διδακτική επανασύνδεσή τους υπό το πρίσμα του ολισμού και παρουσίασή τους, μέσω δυναμικού λογισμικού Γεωμετρίας.

Εισαγωγή: Ο Ολισμός, είναι μια φιλοσοφική θεωρία που αναπτύχθηκε στις αρχές του 20ού αι. και, στην προσπάθειά του να δώσει απάντηση στο πρόβλημα της σχέσης μεταξύ μέρους και όλου, προσέδωσε απόλυτο χαρακτήρα στο όλο.(Λεξικό Τριανταφυλλίδη) Ως σύγχρονη αντίληψη, θεωρεί ότι στα ολιστικά σχήματα, τα μέρη δεν κατανοούνται έξω από το όλον ούτε παρατηρούνται ξέχωρα απ΄ αυτό. Θεωρία του Χάους , Θεωρία της πολυπλοκότητας και Συστημική Θεωρία , αποτελούν τις αντανακλάσεις του Ολισμού στην Επιστήμη και ως θέση, είναι στον αντίποδα της τάσης για συνεχή εξειδίκευση. Στις επιστήμες, μπορεί κάποιος να παρατηρήσει τις επιδράσεις της ολιστικής θεώρησης λ.χ. στην Ιατρική (Ολιστική Ιατρική) στην Οικονομία (Αειφόρος και βιώσιμη ανάπτυξη) Βιολογία και επιστήμη περιβάλλοντος (Θεωρία Γαίας) κ.ά.

Στην διδακτική των επιστημών , ο ολισμός, εμφανίζεται με την προαγωγή του διεπιστημονικού χαρακτήρα της γνώσης και της διαθεματικότητας στην διδασκαλία . Αλλά πολύ πριν φθάσουμε στο επίπεδο της διαθεματικότητας , θα πρέπει να προηγηθεί η όποια διδακτικά εφικτή ενοποίηση μεταξύ των ίδιων κλάδων των μαθηματικών, όπως και μεταξύ των επιπέδων διδασκαλίας του ιδίου αντικειμένου ηλικιακά, μέσω της σπειροειδούς λογικής του Αναλυτικού προγράμματος. Αυτό θα προσπαθήσουμε να αναδείξουμε στην παρούσα εργασία και με την βοήθεια ενός πανίσχυρου εργαλείου της δυναμικής Γεωμετρίας , εν προκειμένω του Sketchpad.

Ένα παράδειγμα γ. τόπου: Η μεσοκάθετος είναι χαρακτηριστικό, όσο και βασικό απλό παράδειγμα διαχρονικής διδασκαλίας, καθώς διδάσκεται στην Α΄ γυμνασίου αλλά και Α΄ Λυκείου. Συνήθως, διδάσκεται η μεσοκάθετος, μόνο ως το σύνολο των σημείων με την γνωστή ιδιότητα – ισότητα , καθώς και η μοναδικότητά της (αντίστροφο):

Τι συνήθως δεν διδάσκεται:

1)Η ανάδειξη του ευρύτερου , ότι δηλ. η μεσοκάθετος χωρίζει το επίπεδο σε τρεις κλάσεις σημείων . Των ισαπεχόντων από τα άκρα του ευθ. τμήματος που είναι η ίδια η μεσοκάθετος, του δεξιού ημιεπιπέδου, όπου όλα τα σημεία του (πλην της μεσοκαθέτου) έχουν την ιδιότητα να απέχουν περισσότερο από το άκρο που δεν ανήκει σε αυτό και του αριστερού ημιεπιπέδου με την ανάλογη ιδιότητα. Εξυπακούεται, ότι αυτή η θεώρηση, παρασύρει και τους άλλους απλούς γεωμετρικούς τόπους σε αυτή την διδασκαλία

α)Το τόξο κύκλου που χωρίζει τα σημεία ενός ημιεπιπέδου σε αυτά που βλέπουν το ευθύγραμμο τμήμα με σταθερή γωνία , στα απ΄ έξω με μικρότερη γωνία και στα εντός που βλέπουν το ευθύγραμμα τμήμα με μεγαλύτερη γωνία. (εξαιρούνται τα άκρα του ευθ.τμήματος)

β)Τα σημεία του κύκλου που απέχουν απόσταση ρ ,του εσωτερικού του κυκλικού δίσκου που απέχουν μικρότερη από ρ και του εξωτερικού του κυκλικού δίσκου που απέχουν μεγαλύτερη από ρ .

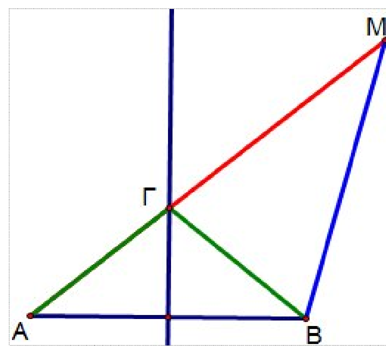
γ) Την έννοια της λωρίδας δύο ευθειών που χωρίζει κι αυτή τα σημεία του επιπέδου σε σχέση με την μεσοπαράλληλο σε τρεις τόπους .

δ) Την διχοτόμο γωνίας που κι αυτή χωρίζει την γωνία σε τρεις τόπους.

2) Δεν μνημονεύεται συνήθως η γενίκευση του μεσοκαθέτου επιπέδου για τον χώρο.(Αυτό έχει και σχέση με την –ουσιαστικά- μη διδασκαλία της στερεομετρίας στο Λύκειο)

3) Κατά την διδασκαλία της υπερβολής, συνήθως δεν αναδεικνύεται ότι αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της μεσοκαθέτου, αφού η «σταθερή διαφορά απόστασης από δύο δεδομένα σημεία» είναι μηδέν για την μεσοκάθετη και διάφορη του μηδενός για τις διπλές καμπύλες –υπερβολές.

4) Η σχεδίαση ομοειδών γεωμετρικών τόπων στο επίπεδο, είναι πλέον εύκολη υπόθεση με τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά και αυτή η ευκολία, μπορεί να αναδείξει έννοιες με τις οποίες συνήθως έρχεται σε επαφή ο μαθητής είτε πολύ αργότερα, είτε μέσω άλλων επιστημών. Τέτοιες έννοιες είναι οι «δυναμικές γραμμές πεδίου» (Φυσική) «Ισοβαρείς γραμμές» (Μετεωρολογία) «ισοϋψείς γραμμές» (Γεωγραφία –Γεωδαισία επιφάνειες στον χώρο) με αυτό τον τρόπο , μπορεί να αναδειχθεί καλύτερα και η

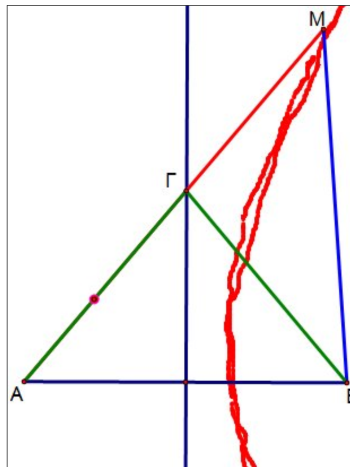


υπάρχουσα σύνδεση της Γεωμετρίας με έννοιες που είναι θεμελιώδεις για άλλες επιστήμες.

Η προσέγγιση μέσω ισο-ανισοαπεχόντων σημείων: Το παραδίπλα σχήμα του sketchpad, έχει την εξής δυναμική συμπεριφορά: Το Μ κινείται ελεύθερα στο επίπεδο και εξαρτημένα το Γ που είναι η τομή του ΜΑ και της μεσοκαθέτου. Καθώς ΓΑ=ΓΒ , καθίσταται οπτικά εμφανές ότι ΜΑ>ΜΒ μέσω της τριγωνικής ανισότητας .Σε αυτό βοηθά και η σχεδίαση των ίσων τμημάτων ΓΑ και ΓΒ με ίδιο χρώμα (κάτι που δεν φαίνεται στην παρούσα ασπρόμαυρη εκτύπωση) Καθώς το Μ πλησιάζει την μεσοκάθετο η ΜΓ ελαττώνεται και όταν το Μ συμπέσει με το Γ εξαφανίζεται (είναι σε άλλο χρώμα) . Όταν το Μ βρεθεί στο άλλο ημιεπίπεδο το Γ είναι πια σημείο τομής με την ΜΒ.

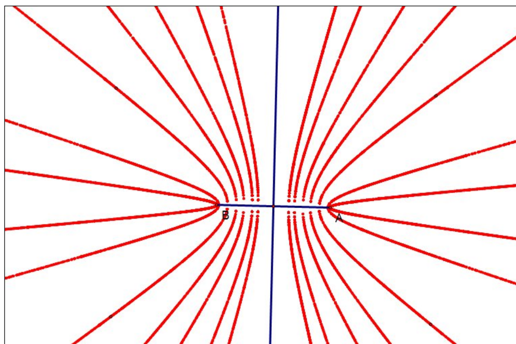
Μετάβαση στην υπερβολή μέσω της μεσοκαθέτου: Η υπερβολή ορίζεται ως ο Γ.Τ. των σημείων το επιπέδου που απέχουν σταθερή διαφορά απόστασης από δύο δεδομένα σημεία. Άρα για την περίπτωση της μηδενικής διαφοράς έχω την μεσοκάθετο και για κάθε άλλη θετική διαφορά έχω την διπλή καμπύλη όπως έχομε συνηθίσει αν και θα μπορούσαμε να ορίσουμε την θετική ή και αρνητική διαφορά μιας και ομιλούμε για αποστάσεις.

Η προσεγγιστική κατασκευή της υπερβολής, ιστορικά ήταν ένα πρακτικά δύσκολο πρόβλημα, καθώς με κανόνα και διαβήτη μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα σημείο την φορά. Τώρα όμως μπορούμε να την κατασκευάσουμε με την ίδια ευκλείδειο λογική μέσω του δυναμικού γεωμετρικού εργαλείου. Πριν ο μαθητής φθάσει στην λογική τη κατασκευής της, μπορεί να μεταφέρει μέσω κύκλου το ΜΒ πάνω στο ΜΑ και να σχηματίσει έτσι την διαφορά ΜΑ-ΜΒ . στην συνέχεια μπορεί να προσπαθήσει να κινεί το Μ προσπαθώντας αυτή η διαφορά να μένει σταθερή. Τα αποτελέσματα ενός τέτοιου πειραματισμού τα βλέπουμε στο διπλανό σχήμα.



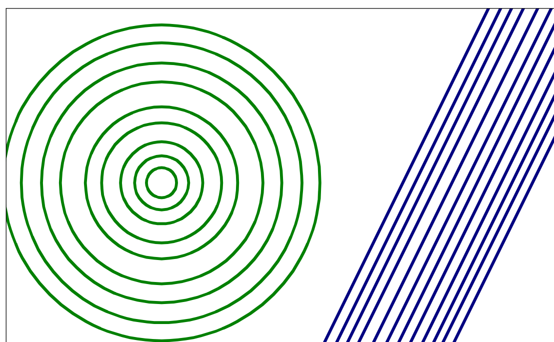
Η κατασκευή: Η δυναμική εικόνα ενός σταθερού ευθ. Τμήματος , σε μια προέκταση του οποίου κινείται σημείο, δίνει την ιδέα-έννοια της σταθερής διαφοράς αποστάσεων από τα άκρα του (υπερβολή) Στην συνέχεια, κατασκευάζοντας κατά τα γνωστά του κύκλους (Β,ΒΜ) και (Α,ΑΜ) και ορίζοντας τα σημεία τομής , έχω μια εικόνα του

τόπου που μπορώ να σχεδιάσω μεταβάλλοντας το ελεύθερο σημείο. Μετά μπορώ να ορίσω και το συμμετρικό του ως προς την μεσοκάθετο. Δεν τελειώνει όμως εκεί η διαπραγμάτευση, καθώς μπορώ να σχεδιάσω εύκολα πολλές υπερβολές για διάφορες αποστάσεις και να πάρω εικόνες όπως η παραπάνω. Στην προσπάθεια κατασκευής όλο και μεγαλύτερης διαφοράς , ο μαθητής θα διαπιστώσει, ότι θα εξαφανιστούν τα σημεία τομής των κύκλων και θα κληθεί να το ερμηνεύσει (τριγωνική ανισότητα) Αν μάλιστα ερωτηθεί για το τι του θυμίζει αυτή η εικόνα από άλλα μαθήματα, πιθανότατα θα απαντήσει , «τις δυναμικές γραμμές των πεδίων στην Φυσική». Εδώ μπορούμε να τις ονομάσουμε ως «καμπύλες ίσων διαφορών αποστάσεων» από τα δύο σημεία.



Η σύνδεση που μπορεί να γίνει είναι :

i) Με τις εικόνες δυναμικών γραμμών ή επιφανειών πεδίων της φυσικής και με τους ορισμούς: ισοϋψείς, ισοβαρείς γραμμές (ο γ.τ. των σημείων χώρου ή επιπέδου με μια συγκεκριμένη κοινή ιδιότητα)

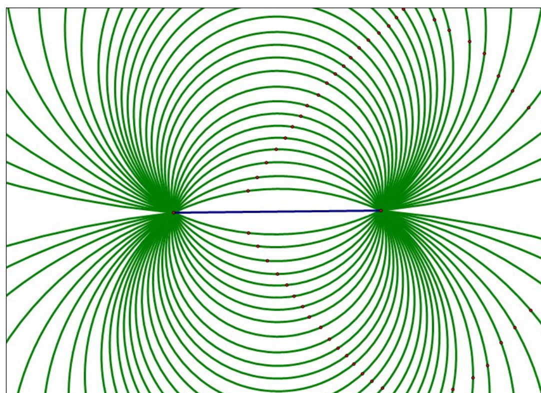


ii) Με την ιδιότητα της ενδιάμεσης τιμής που έχει ένα σημείο ανάμεσα σε δύο διαδοχικές γραμμές.

iii) Με την εξήγηση γιατί δύο τέτοιες γραμμές δεν είναι δυνατόν να τέμνονται (Χρήση της εις άτοπον απαγωγής : «Αν ετέμνοντο , το σημείο τομής θα είχε δύο διαφορετικές αντιφατικές ιδιότητες»)

iu) Με την επισήμανση , ότι και οι ευθείες των τετραδίων μας είναι οι «ισοαποστασιακές» μιας ευθείας που μπορούμε να λάβουμε ως ευθεία αναφοράς και ότι οι ομόκεντροι κύκλοι είναι οι «ισοαποστασιακές» από το κοινό κέντρο του κύκλου.

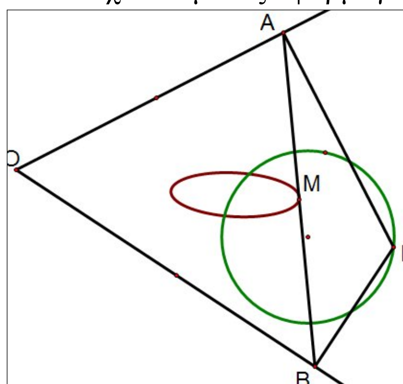
u) Με την ανάδειξη του παρακάτω σχήματος το οποίο επισημαίνει και αισθητοποιεί τα σημεία του επιπέδου που βλέπουν σταθερό



ευθ. Τμήμα με σταθερές γωνίες.
Ενδιαφέρον παρουσιάζει και ο δυναμικός χειρισμός αυτών των σχημάτων, καθώς όταν το μήκος του ευθ. Τμήματος τείνει στο μηδέν, οπτικοποιούνται έννοιες ανάλογες με την έννοια «δυναμικές γραμμές σημειακού διπόλου» στην Φυσική.

Ποίοι είναι οι απλοί τόποι και ποίοι οι μη απλοί; Η απάντηση στο ερώτημα φαίνεται εύκολη, αλλά κατά την γνώμη μας, δεν είναι. Η βαριά όσο και σπουδαία μακρά ιστορική κληρονομιά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, έχει δημιουργήσει και κατεστημένες αντιλήψεις γύρω απ΄ αυτήν και είναι απολύτως λογικό. Τα τελευταία χρόνια δημιουργούνται τα δυναμικά γεωμετρικά λογισμικά και η Γεωμετρία παύει να είναι στατική και να διδάσκεται με μια κιμωλία στον πίνακα , όπως εγίνετο επί 2.000 και πλέον χρόνια. Η γεωμετρία επαναν ακαλύπτει τον χαμένο (και μάλλον αποκρυπτόμενο) πειραματικό χαρακτήρα της.[1] Η κορύφωση της χρήσης των δυναμικών γεωμετρικών λογισμικών (Sketchpad, Cabri , EucliDraw) γίνεται στους γ.τ. , καθώς το ίδιο το αντικείμενο , ενώ είναι φύσει δυναμικό , εδιδάσκετο στατικά , λόγω τεχνικών περιορισμών. Σε αυτά τα πλαίσια, επειδή έπρεπε και ο γ.τ., να είναι κατασκευάσιμος με κανόνα και διαβήτη, θα έπρεπε να ήταν ή κύκλος ή ευθεία ή τμήματα των προηγουμένων. Ακόμα και προ τεσσαρακονταετίας, όπου η διδασκαλία των γ.τ. ήταν πρωτεύον εμφαντικό τμήμα του αναλυτικού προγράμματος με διδασκαλία ακόμη και του αντιστρόφου κάθε τόπου , δεν διαπραγματεύοντο στην τάξη ή στα βιβλία της εποχής θέματα με κωνικές τομές. Ακόμα και στα περιώνυμης δυσκολίας βιβλία των Ιησουϊτών , είχαμε ελάχιστες ασκήσεις γ.τ. με κωνικές τομές . Μέχρι προ ολίγων ετών (αλλά ίσως και σήμερα) επιστρατεύοντο τεχνικές με καρφάκια και σχοινάκια για να σχεδιασθεί μια έλλειψη. Τώρα για να σχεδιάσει ο μαθητής μέσω ενός δυναμικού εργαλείου, μια έλλειψη, το μόνο που πρέπει να έχει καταλάβει είναι η εικόνα ενός σημείου που κινείται ανάμεσα στα άκρα ευθυγράμμου τμήματος και επομένως έχει σταθερό άθροισμα αποστάσεων από αυτά. Αν κινείται εκτός , έχει σταθερή διαφορά από τα άκρα του (υπερβολή) Αν τεντώνω κατάλληλα ένα ευθύγραμμο τμήμα που χωρίζεται από ένα σημείο σε δεδομένο λόγο, αυτός διατηρείται και επομένως είναι εύκολη η κατασκευή του Απολλώνιου κύκλου . Επειδή όμως αυτή η (ομοπαραλληλική) ιδιότητα της ευθείας δεν θεωρείται στο Λύκειο γνωστή, η σταθερότητα του λόγου μπορεί να γίνει με ένα απλό μοντέλο δύο ομοίων τριγώνων με κοινή κορυφή, με συμμεταβολή δύο ζευγών ομολόγων πλευρών, ενώ το τρίτο μένει σταθερό. Ως προέκταση των $x+y=ct$, $x-y=ct$, $x/y=ct$, έρχεται το $xy=ct$, κάτι που μπορεί να εκληφθεί από την δύναμη

σημείου ως προς κύκλο και άρα να γίνει εφικτή εύκολα λ.χ. η κατασκευή των καμπυλών του Κασίνι (G.D. Cassini 1625-1712) [3] & [5] που είναι ο γ.τ. των σημείων του επιπέδου των οποίων οι αποστάσεις από δύο σταθερά σημεία ,έχουν σταθερό γινόμενο. Μάλιστα έχουν και ενδιαφέρουσα διερεύνηση. Δεν είναι τυχαίο, που όλα τα εγχειρίδια χρήσης και δραστηριοτήτων των δυναμικών λογισμικών, περιλαμβάνουν τέτοια θέματα γ.τ. , τα οποία κανένα παραδοσιακό διδακτικό εγχειρίδιο Λυκείου δεν τολμούσε να αγγίξει στο παρελθόν για τους αντικειμενικούς λόγους που εξηγήσαμε. Ιδίως οι μηχανισμοί αρθρωμάτων που έχουν άμεσες εφαρμογές στην Μηχανική είναι θέμα που δεν μπορούσε να προσεγγιστεί καν μέσω παραδοσιακών μεθόδων. [7] & [8] Το ίδιο αφορά θέματα γ.τ. που αφορούν κίνηση ευθύγραμου τμήματος ή γενικότερα σχήματος καθώς κινείται ένα συσχετιζόμενο κατασκευαστικά σημείο ή άλλο σχήμα με αυτό. Θέματα δηλαδή που η παραδοσιακή μελέτη άγγιζε εξαιρετικά δύσκολα (σε επίπεδο διδασκαλίας στην Δ.Ε. καθόλου) και τα οποία τώρα παράγονται μέσω απλού πειραματισμού και μάλιστα μέσω απλών σχημάτων. Για παράδειγμα έχομε τον γ.τ. του διπλανού σχήματος, όπου το Γ κινείται επί κύκλου, Α και Β οι προβολές του Γ στις πλευρές της γωνίας ΑΟΒ, και Μ το μέσον του ΑΒ. Ο γ.τ. του Μ, φαίνεται να είναι μια έλλειψη. Αν ο μαθητής ενεργοποιήσει την εντολή «σχεδίαση ίχνους ΑΒ» Τότε θα πάρει ένα οιονεί αμφίκοιλο σχήμα όπου οι θέσεις του ΑΒ θα αποτελούν τις περιβάλλουσες δύο καμπυλών που δεν μοιάζουν να είναι τόξα κύκλων. Μπορεί ακόμα να πάρει νέο σημείο Μ΄ επί του ευρεθέντος τόπου και φέρνοντας πάλι τις προβολές να βρει «τον γεωμετρικό τόπο του γεωμετρικού τόπου!» Κι αυτό μπορεί να το επαναλάβει όσες φορές θέλει. Μπορεί επομένως η Γεωμετρία να διδάσκεται μόνο με κιμωλία; Να υπενθυμίσουμε ακόμα, ότι η διαπραγμάτευση θεμάτων γ.τ. μέσω της Αναλυτικής Γεωμετρίας, εγγενώς, δεν δίνει έμφαση ούτε στο σχήμα, ούτε βεβαίως στα οπτικά μαθηματικά [2], άρα η διαπραγμάτευση θεμάτων γ.τ. μέσω λογισμικών, ενισχύει και τους δύο κλάδους της Γεωμετρίας (Αναλυτική- Ευκλείδειο) και όχι μόνο, αφού με τις δυνατότητες που έχουν τα δυναμικά λογισμικά, συνδέουν συμμεταβαλλόμενα γεωμετρικά μεγέθη με την διαγραμματική τους απεικόνιση και με την οριακή τους συμπεριφορά, άρα και με την Ανάλυση.



Προσδοκώμενα οφέλη : Θεωρούμε, ότι με την προηγουμένη διδακτική θεώρηση και πρακτική, γίνεται μια προσπάθεια να ενοποιηθούν ασύνδετα στοιχεία των συγκεκριμένων πεδίων της Γεωμετρίας και Φυσικής που παρουσιάσαμε. Με την παράλληλη διδασκαλία της ισότητας και ανισότητας στους στοιχειώδεις τόπους, πιθανόν να διευρύνονται τα γνωστικά πλαίσια των μαθητών και προάγονται γνωστικά σχήματα μέσω αφομοίωσης και προσαρμογής. Αυτά τα νοητικά σχήματα, θα επιτρέψουν στον μαθητή να κάνει αναδιοργάνωση και εξισορρόπηση ως στοιχεία της κατανόησης, μέσω των νοητικών λειτουργιών αναγνώρισης, γενίκευσης, διάκρισης και σύνθεσης. [4] Πεδία εφαρμογής των προηγουμένων εμπεδωμένων γνώσεων και σε συνάρτηση με μελλοντικές γνώσεις που θα αποκτήσουν οι μαθητές, θα μπορούσαν να είναι η βελτίωση της ικανότητάς τους στην αναγνώριση δομών[1], [2], [6] πράγμα που αποτελεί τον πυρήνα της μαθηματικής ανακάλυψης και όχι μόνο. Επί μέρους πεδία που συνδέονται με τα προηγούμενα, είναι η γραφική λύση εξισώσεων και ανισώσεων, η ο γραμμικός προγραμματισμός (βελτιστοποίηση) το πεδίο διευθύνσεων διαφορικής εξίσωσης , μικροοικονομικά μοντέλα (λ.χ. μεγιστοποίηση οφέλους υπό δεδομένο εισοδηματικό περιορισμό) οικογένεια καμπυλών (ορθογώνιες τροχιές) και βεβαίως ο κατάλογος δεν εξαντλείται, αφού ο χαρισματικός μαθητής ή αργότερα ο ερευνητής, θα μπορεί να κάνει εύκολα συνδέσεις με αναλογική σκέψη στα πλαίσια αναγνώρισης δομών σε ασύνδετα φαινομενικά στοιχεία , χωρίς να χάνει χρόνο ωρίμανσης με αυτοανακαλύψεις επί ασυνδέτων γνώσεων μέσω αναστοχασμού , αλλά πολλές απ΄ αυτές, να έχουν συνδεθεί κατά ένα σημαντικό μέρος στην τρέχουσα διδασκαλία του προγράμματος σπουδών του , μέσω της ολιστικής , προσέγγισης της γνώσης και έτσι, ο μελλοντικός επιστήμονας , να έχει ένα σημαντικό προβάδισμα στην εμπέδωση αλλά και στην ανακάλυψη νέας γνώσης.

Βιβλιογραφικές & διαδικτυακές αναφορές:

[1] Νεγρεπόντης Σ. Νοέμβριος 2004 «Συζήτηση με τον καθηγητή Στέλιο Νεγρεπόντη» Περιοδικό *«Το Φ»* Τεύχος 1 , σελ. 97-112

[2] Λυγερός Ν. Νοέμβριος 2005 «Οπτικά Μαθηματικά» Πρακτικά συνεδρίου ΕΜΕ Λαμίας.σελ.155-159

[3] Παντελίδης Γ.-Κραββαρίτης Χ. Λεξικό Μαθηματικών , λήμμα «Γεωμετρικός τόπος»

[4] Κλαουδάτος Ν. Σημειώσεις μετ/κου μαθήματος «Διδακτική των Μαθηματικών» Αθήνα 2004

[5] http://new.math.uiuc.edu/eggmath/Shape/cassini.html

[6] http://www.lygeros.org/2489-gr.htm
[7] http://www.math.uoc.gr/~pamfilos/gGallery/Gallery.html
[8]http://www.mfdabbs.pwp.blueyonder.co.uk/Maths_Pages/SketchPad_Files/Mechanical_Linkages/Mechanical_Linkages.html
Abstract : The teaching of simple geometrical locus constitutes a part of one Geometric knowledge, while significances, as the conic sections or the dynamic lines in the Physics or in other sciences, constitute certain extensions or even their generalisations, that however usually are presented incohesively and fragmentarily. The work proposes their instructive reconnection in the light holism and their presentation, via a dynamic software of Geometry.